



TITLE:

# Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems (電 気回路の力学系)

AUTHOR(S):

池上, 宜弘

---

CITATION:

池上, 宜弘. Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems (電気回路の力学系).  
数理解析研究所講究録 1976, 284: 64-78

ISSUE DATE:

1976-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106091>

RIGHT:

## Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems

名大 教養部 池上宜弘

### § 0.

Periodic time dependent dynamical system のある種の安定性,  $\Omega$ -stability, を [1] に於て定義した. この小論では, この定義の必然性について少し詳しく説明し, [1] の結果を発展させた定理を述べる.

### § 1.

多様体  $M$  上の time dependent dynamical system とは次の形の方程式をいう.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{----- (1)}$$

以後,  $M$  は境界を持たない compact manifold とする. (1) は次の様な  $M \times \mathbb{R}$  上のベクトル場  $X$  と対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x, t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}) \quad \text{----- (2)}$$

(1)が  $f(x, t) = f(x, t+1)$  をみたすとき, この system は 周期 1 を持つという.  $M$  上の周期 1 を持つ  $C^r$  級の time dependent dynamical system 全体が作る集合を  $P^r(M \times \mathbb{R})$  で示すことにする.

$(x_0, t_0)$  を初期値とする (1) の解

$$\varphi(x_0, t_0, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow M \quad (t \longmapsto \varphi(x_0, t_0, t))$$

を  $(x_0, t_0)$  から出る  $M$  上の軌道 ということにする.  $\varphi(x_0, t_0, t)$  を  $\varphi_t(x_0, t_0)$  と書く.  $\varphi(x_0, t_0, \cdot)$  の像を 軌跡 といふが, 軌道 という言葉で軌跡を意味することもある.  $\varphi(x_0, t_0, \cdot)$  が 周期軌道 であるとは, 実数  $\sigma$  <sub>( $\sigma \neq 0$ )</sub> が存在して任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して,  $\varphi_{t+\sigma}(x_0, t_0) = \varphi_t(x_0, t_0)$  が成立することである. 周期軌道に対して, この  $\sigma$  は正数にとれる. この様な  $\sigma$  の最小正数  $\sigma_0$  をこの 軌道の周期 といふ. 上の  $\sigma$  は  $\sigma_0$  の整数倍である.

$X \in P^r(M \times \mathbb{R})$  に対して  $M \times S^1$  上の autonomous system  $\bar{X}$  が次の様に定義される.  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  と考えて, 写像  $\rho : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times S^1$  は  $\rho(x, t) = (x, [t]) \in M \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  により定義されるものとする. ただし,  $[t]$  は  $t$  を含む  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  の class である. このとき,

$$\bar{X}_{(x, [t])} = (f(x, t), 1) \in T_x(M) \times T_{[t]}(S^1) \approx T_{(x, [t])}(M \times S^1)$$

により  $\bar{X}$  が与えられる. つまり,  $\bar{X}$  は  $M \times \mathbb{R}$  上の system  $X$  を,  $M \times S^1$  上に最も自然に巻きつけて得られるものである.

$X \in P^r(M \times R)$  の flow を  $\Phi: (M \times R) \times R \rightarrow M \times R$  であらわし,  $\bar{X}$  の flow を  $\bar{\Phi}: (M \times S^1) \times R \rightarrow M \times S^1$  であらわすことにする.  $\pi_M: M \times R \rightarrow M$  又は  $\pi_M: M \times S^1 \rightarrow M$  を  $M$  成分への射影とすると,

$$\pi_M \circ \Phi(x, t_0, t) = \varphi(x, t_0, t) = \pi_M \circ \bar{\Phi}(x, [t_0], t)$$

が成立する.  $\Phi(x, t_0, \cdot)$  を  $X$  の  $M \times R$  上の軌道, その像を  $M \times R$  上の軌跡 といい,  $\pi_M \circ \Phi = \varphi$  が周期軌道であるとき,  $\Phi$  を  $M \times R$  上の周期軌道 という.

$X \in P^r(M \times R)$  に対し  $C^r$  微分同相写像  $T_X: M \rightarrow M$  が,  $T_X(x) = \varphi_1(x, 0)$  により定義される.  $M_0 = M \times [0] \subset M \times S^1$  とすると,  $M_0$  は  $\bar{X}$  の cross-section であるが,  $M_0 = M$  と考えるとき,  $T_X$  は  $\bar{X}$  に関する  $M_0$  上の Poincaré transformation と一致する. 従って, 以後  $T_X$  を  $X$  に対する Poincaré map と呼ぶことにする. 任意の  $t$  に対して  $\varphi(x, t_0, t) = x$  となる  $x$  を  $X$  の 特異点 といい,  $\varphi(x, t_0, \cdot)$  が周期軌道であるとき,  $(x, t_0)$  は  $X$  の 周期点 という.

Proposition 1.  $x$  が  $T_X$  の周期点. (不動点も含む.)

$\iff (x, 0)$  が周期を有理数とする  $X$  の周期点, 又は  $x$  が特異点.

$\iff (x, [0]) \in M_0$  を通る  $\bar{X}$  の軌道は閉軌道.

特に,  $(x, 0)$  の周期を  $\frac{m}{n}$  (既約分数) とするとき,  $x$  は  $n$

を周期とする  $T_X$  の周期点である。

Proposition 2.  $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$  とし、各々の Poincaré map を  $T_X, T_Y$  とするとき、同相写像  $T_X, T_Y$  は topologically equivalent であるならば、 $\bar{X}, \bar{Y}$  は topologically equivalent である。

注意 ある境界を持たない compact manifold  $M$  に対し、次の条件を持つ  $X, Y \in P^0(M \times \mathbb{R})$  が存在する； (i)  $\bar{X}$  と  $\bar{Y}$  は topologically equivalent, (ii)  $T_X$  と  $T_Y$  は topologically equivalent ではない, (iii)  $T_X, T_Y$  は, Morse-Smale system である。

Proposition 1, 2 により、 $T_X$  の軌道の状態から  $X$  の軌道に関する情報がある程度得られる。N. Levinson は、ある種の  $X$  に関する Poincaré map  $T_X$  について、特に  $T_X$  の周期点の数についてしらべている [4]。

しかし、 $T_X$  の軌道の状態からは  $X$  の軌道の状態は十分には分らない。たとえば、 $x$  が  $T_X$  の不動点としても、 $(x, 0)$  が  $X$  の周期点なのか持異点なのか分らない。

例. 2階微分方程式

$$x'' - A^2 x = \varepsilon \sin 2\pi t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0 \quad \dots (*)$$

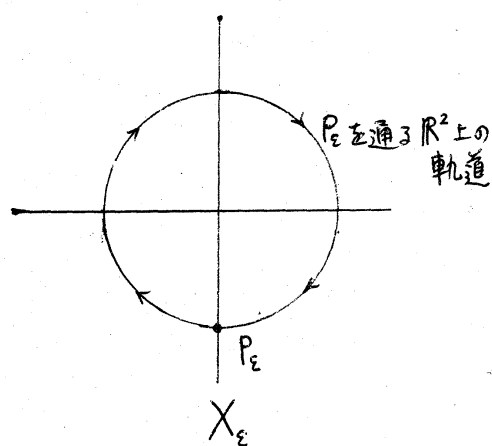
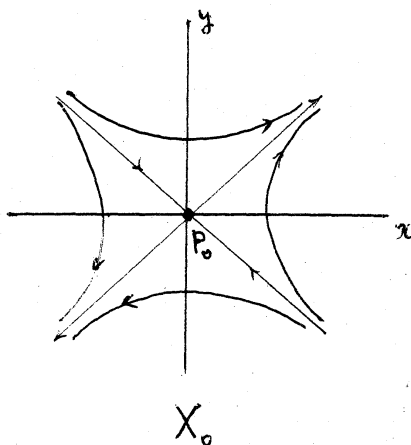
の一般解は

$$x(t) = c_1 e^{At} + c_2 e^{-At} - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 + A^2} \sin 2\pi t$$

である。(\*) は次の time dependent system  $X_\varepsilon \in P^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  と同じである。

$$X_\varepsilon: \begin{cases} x' = y \\ y' = A^2 x + \varepsilon \sin 2\pi t \end{cases}$$

$X_\varepsilon$  の Poincaré map を  $T_\varepsilon$  とする.  $\varepsilon = 0$  のとき,  $T_0$  は唯一つの周期点 (不動点)  $P_0 = (0, 0)$  を持つ. 実は,  $P_0$  は hyperbolic な不動点であるから,  $\varepsilon$  が十分小さければ  $T_\varepsilon$  は  $P_0$  の近傍に hyperbolic な不動点  $P_\varepsilon$  を 1 つ持つはずである.  $P_\varepsilon$  は  $T_\varepsilon$  の唯一つの周期点である. 故に, Poincaré map に関して,  $P_0$  と  $P_\varepsilon$  は全く同じ定性的性質を持つ. しかし,  $X_0$  と  $X_\varepsilon$  に関しては,  $P_0$  は特異点であり,  $P_\varepsilon$  は周期 1 の周期点である.



$P_0$  は  $T_0$  の安定な不動点であるか,  $P_0$  を  $X_0 \in P^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  の特異点とすれば,  $P_0$  は安定とは言えない.

上の考察より,  $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$  に対して  $\bar{X}, \bar{Y}$  又は  $T_X, T_Y$  の topological equivalence は  $X, Y$  の  $M$  上の軌跡の位相的状态を保存しない. ここで,  $X, Y$  の  $M$  上の軌跡の位相的性質を保存するような equivalence を  $X, Y$  に対して定義する.

定義 1.  $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$  が equivalent であるとは、同相写像  $h_0: M \rightarrow M$ ,  $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  が存在し、次の条件を満たすことである。

i)  $h$  は  $M \times \mathbb{R}$  における  $X$  の軌跡を  $Y$  の軌跡に方向を保てうつす。(すなわち、 $h$  は  $X, Y$  の topological equivalence.)

ii)  $\pi_M h = h_0 \pi_M$ . すなわち、次の図が可換である。

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & M \times \mathbb{R} \\ \downarrow \pi_M & \circlearrowright & \downarrow \pi_M \\ M & \xrightarrow{h_0} & M \end{array}$$

iii)  $h$  は時間に関して周期 1 を持つ；

$$h(x, t+1) = (\pi_M h(x, t), \pi_R h(x, t) + 1) \in M \times \mathbb{R}.$$

ただし、 $\pi_R: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  成分への射影である。

Proposition 3.  $X, Y$  が equivalent ならば、 $X$  の  $M$  上の軌跡  $\phi^X(x, t_0, \mathbb{R})$  の  $h_0$  による像は  $Y$  の 1 つの軌跡  $\phi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$  となる。

Proposition 4.  $h$  が  $X$  から  $Y$  への equivalence で、軌跡  $\phi^X(x, t_0, \mathbb{R})$  が  $h$  により軌跡  $\phi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$  へ写せれるとき、 $\phi^X(x, t_0, \cdot)$  が有理数を周期とする周期軌道ならば、 $\phi^Y(y, s_0, \cdot)$  もそうである。その上、各々の周期を  $n_x/m_x, n_y/m_y$  (既約分数) とすれば、 $n_x = n_y$  である。従って、 $M$  上の有理数を周期とする軌跡は  $h_0$  により有理数を周期とする軌跡にうつされ、特異点

は特異点にうつされる。

定義1の equivalence は, Proposition 3, 4 をみたす自然な equivalence のうちで最も条件のゆるいものと思われる。

次に, 無理数を周期とする周期軌道の様子を示しておく。実際に無理数を周期とする周期軌道を持つ  $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$  を作ることができる。又, 有理数を周期とする  $M \times \mathbb{R}$  上の周期軌道  $\gamma$  で,  $\pi_M(\gamma)$  が単純閉曲線でないようなものを持つ  $X$  も作ることができる。

Proposition 5.  $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$ ,  $\Phi$  を  $X$  の flow とする。  $\gamma$  が  $X$  の  $M \times \mathbb{R}$  上の軌道で無理数周期  $\sigma$  を持つとき, 次が成立する。

(i)  $p \in \gamma$  に対して, 写像  $[0, \sigma] \rightarrow M$  ( $t \mapsto \pi_M \circ \Phi(p, t)$ ) の像  $C$  は単純閉曲線となる。

(ii)  $\pi_M^{-1}(C)$  の任意の点  $q$  を通る軌道  $\gamma_q$  も周期  $\sigma$  を持ち,  $\gamma_q$  は  $C \times \mathbb{R}$  に含まれる。

(proof)  $p_*(X) = \bar{X}$  とし,  $\Phi, \bar{\Phi}$  を各々  $X, \bar{X}$  の flow,  $\rho$  は  $X$  の  $M$  上の軌道とすれば,  $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$  に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_t(x_0, t_0) &= \pi_M \circ \Phi_t(x_0, t_0) = \pi_M \circ \rho \circ \Phi_t(x_0, t_0) \\ &= \pi_M \circ \bar{\Phi}_t(x_0, [t_0]). \quad (\pi_M: M \times S^1 \rightarrow M) \end{aligned}$$

任意の点  $(x_0, t_0) \in \gamma$  に対して,  $\varphi_t(x_0, t_0) = \varphi_{t+s}(x_0, t_0)$  をみたす正数  $s$  の最小数が  $\sigma$  である。  $p(\gamma) = \bar{\gamma}$  は  $\bar{X}$  の軌道で



ある.  $p(x_0, t_0) = (x_0, [t_0]) \in \bar{Y}$  を  $p$  とおけば,  $x_0 \times S^1$  上には  $\{\bar{\Phi}_{n\tau}(p) | n \in \mathbb{Z}\}$  が dense に存在する. 今  $0 < \tau < \delta$  なる  $\tau$  が存在して,  $\pi_M \bar{\Phi}_\tau(p) = x_0 (= \pi_M(p))$  と仮定する.  $\bar{\Phi}_\tau(p) = q$  とおけば, 数列  $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$  が存在して,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_{n_i \tau}(p) = q$ . 故に,

$$\bar{\Phi}_s(q) = \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_\tau(p) = \bar{\Phi}_s \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_{n_i \tau}(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i \tau}(p).$$

従って,

$$\pi_M \bar{\Phi}_s(q) = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi_M \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i \tau}(p) = \pi_M \bar{\Phi}_s(p).$$

故に,

$$\pi_M \bar{\Phi}_\tau(\bar{\Phi}_s(p)) = \pi_M \bar{\Phi}_s(p).$$

これより,  $\bar{\Phi}_\tau \bar{\Phi}_s(x_0, t_0) = \bar{\Phi}_s(x_0, t_0)$  を得るが,  $\bar{\Phi}_s(x_0, t_0)$  は  $Y$  の任意の点としてよいから,  $0 < \tau < \delta$  より, この式は  $\delta$  が  $Y$  の周期である事に矛盾する. 故に (i) が証明された. (ii) も同様の方法で示される.

## § 2.

$P^r(M \times R)$  における安定性を考察するために,  $P^r(M \times R)$  に位相を入れる.  $M \times R$  上の  $C^r$  級 vector 場の空間と考え,  $P^r(M \times R)$  には uniform  $C^r$  topology を入れる. もしも, Whitney topology を入れたら,  $P^r(M \times R)$  は discrete space になる.

$T_{(\alpha, s)}(M \times S^1) \approx T_\alpha(M) \times T_s(S^1)$  を同一視して,

$$\mathcal{X}_1^r(M \times S^1) = \{\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1) | \bar{X}_{(\alpha, s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{ 成分} = 1\}$$

とする. これは,  $M \times S^1$  上の  $C^r$  vector 場全体の作る集合に  $C^r$  topology を入れた空間  $\mathcal{X}^r(M \times S^1)$  の部分空間である. 写像  $p$ :

$M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times S^1$  より写像  $p_*: p^r(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1^r(M \times S^1)$  が自然に得られる. するはち,  $p_*(X) = \bar{X}$ ,  $X_{(\alpha, t)} = (f(\alpha, t), 1) \in T_\alpha(M) \times T_t(\mathbb{R})$  とすると,  $\bar{X}_{(\alpha, [t])} = (f(\alpha, t), 1) \in T_\alpha(M) \times T_{[t]}(S^1)$  である.  $p_*: p^r(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1^r(M \times S^1)$  は同相写像である.

定義1の equivalence に関して (structurally) stable な system を一般の  $M$  の上に採することは難しい<sup>自動的</sup> ようなので,  $\Omega$ -stability に相当するものについて考えたい.  $X \in p^r(M \times \mathbb{R})$  は微分方程式 (1) に対応するものとし,  $\varphi, \psi$  を各々  $M$  上,  $M \times \mathbb{R}$  上の軌道とする.

定義2. 次の条件を満たす点  $\alpha \in M$  を  $X$  又は方程式 (1) の wandering point といい; 任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対して,  $\alpha$  の開近傍  $U \subset M$  と自然数  $n$  が存在して,  $|t| > n$  なる任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $\varphi_t(U, t_0) \cap U = \emptyset$  が成立する. wandering point ではない点を non-wandering point といい. non-wandering point 全体から成る集合を  $X$  の non-wandering set といい,  $\omega(X)$  であらわす.

定義3. 次の条件を満たす  $M \times \mathbb{R}$  の点  $(\alpha, t)$  の集合として,  $\tilde{\Omega}(X)$  を定義する;  $(\alpha, t)$  の任意の開近傍  $U \subset M \times \mathbb{R}$  と任意の自然数  $n$  に対して, 整数  $m$ ,  $|m| > n$ , が存在して,  $U_m \cap \psi_m(U) \neq \emptyset$  となる. ただし,  $U_m = \{(y, s+m) \mid (y, s) \in U\}$  とする.

$M$  上又は  $M \times \mathbb{R}$  上の周期軌道や特異点は  $\omega(X)$  や  $\tilde{\Omega}(X)$  に含まれている.  $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1)$  に対して, 自励系  $\bar{X}$  の non-wandering set を  $\Omega(\bar{X})$  であらわす.

Proposition 6.

(i)  $p_*(X) = \bar{X}$  とすれば,  $\tilde{\Omega}(X) = p^{-1}(\Omega(\bar{X}))$  である. 従って,  $\tilde{\Omega}(X)$  は  $X$  の invariant set である.

(ii)  $\omega(X) = \pi_M(\tilde{\Omega}(X)) = \pi_M(\Omega(\bar{X}))$ . (ただし,  $\pi_M$  は  $M \times \mathbb{R}$  又は  $M \times S^1$  から  $M$  上への射影である.  $\pi_M(\Omega(\bar{X})) = \omega(\bar{X})$  とおく.)

(iii)  $\omega(X) \subset M$ ,  $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$  は閉部分集合である.

(注意)  $\tilde{\Omega}(X)$  の定義において,  $m \in \mathbb{Z}$  のかわりに  $m \in \mathbb{R}$  とすると,  $\tilde{\Omega}(X)$  は閉集合で  $\pi_M(\tilde{\Omega}(X)) = \omega(X)$  はやはり成立するが,  $\tilde{\Omega}(X)$  は invariant set でなくなる.

$\omega(X)$  や  $\tilde{\Omega}(X)$  は特異点や周期軌道を含むことや, Proposition 6 や上の注意から察して,  $\omega(X)$  や  $\tilde{\Omega}(X)$  の構造は定性的に重要である) と考えられる. 次に, 定義1の equivalence の概念を non-wandering set 上で定義する.

定義4.  $X, Y \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$  が  $\tilde{\Omega}$ -equivalent であるとは, 次の条件を満たす同相写像  $h: \tilde{\Omega}(X) \rightarrow \tilde{\Omega}(Y)$ ,  $h_0: \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$  が存在することである;

(i)  $h$  は  $X|_{\tilde{\Omega}(X)}$  と  $Y|_{\tilde{\Omega}(Y)}$  の topological equivalence である.

(ii)  $h_0 \pi_M = \pi_M h$  が  $\tilde{\Omega}(X)$  上で成立する.

(iii)  $h$  は時間に関して周期 1 を持つ.

$\tilde{\Omega}\omega$ -equivalence を  $p$  や  $p_*$  を使って  $\mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$  内に焼き直し概念として, 次のものが定義される.

定義 5.  $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$  が  $\Omega\omega$ -equivalent であるとは, 次の条件を満たす同相写像  $h: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y})$  と  $h_0: \omega(\bar{X}) \rightarrow \omega(\bar{Y})$  が存在することである;

- (i)  $\pi_M h = h_0 \pi_M$  が  $\Omega(\bar{X})$  で成立.
- (ii) 次の条件を満たす isotopy

$H_s: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y}), s \in I$  が存在する;

(a)  $H_0 = h, H_1(\Omega(\bar{X}) \cap M_0) = \Omega(\bar{Y}) \cap M_0$ , すなわち,  $H_1$  は cross-section  $M_0$  の部分を  $M_0$  にうつす.

(b) 任意の  $s \in I$  に対して,  $H_s$  は  $\bar{X}|_{\Omega(\bar{X})}$  と  $\bar{Y}|_{\Omega(\bar{Y})}$  の topological equivalence である.

Lemma 1.  $X, Y$  が  $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent ならば,  $p_*(X) = \bar{X}$  と  $p_*(Y) = \bar{Y}$  は  $\Omega\omega$ -equivalent である.

Lemma 2.  $\Omega\omega$ -equivalence は closed orbit の周期を保つ. すなわち,  $Y$  が  $\bar{X}$  の closed orbit ならば  $h(X)$  も  $\bar{Y}$  の closed orbit で,  $Y$  と  $h(X)$  の周期は等しい.

定義 6.  $X \in P^r(M \times R)$  が  $C^r \tilde{\Omega}\omega$ -stable であるとは,  $X$  の近傍  $N \subset P^r(M \times R)$  が存在して, 任意の  $Y \in N$  は  $X$  と  $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent であることである.  $\bar{X} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$  に対して  $C^r \Omega\omega$ -

stability が同様に定義される。  $\bar{X}$  の近傍  $N \subset \mathcal{X}^r(M \times S')$  が存在して、任意の  $\bar{Y} \in N$  に対して、  $\bar{X}|_{\Omega(\bar{X})}$  と  $\bar{Y}|_{\Omega(\bar{Y})}$  が topologically equivalent であるとき、  $\bar{X}$  は  $C^r$ -stable であるという。

§3.

次に、  $\Omega$ -stability の特徴づけについて考えてみたい。  $M$  と  $S'$  に Riemannian metric  $d$  と  $d'$  を任意に与えておく。

定義 1.  $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S')$  に対し、  $\Omega(\bar{X})$  が  $\pi_M$  に関して general position にあるとは、次の条件がみたされることである。

(i)  $\Omega(\bar{X})$  に含まれる任意の軌道  $\gamma$  に対し、  $\pi_M|_{\gamma}$  は正則な写像である。

(ii)  $\dim M \geq 3$  のとき、

(a)  $K > 0$  が存在して、  $\Omega(\bar{X})$  に含まれる任意の異なる 2 点  $(x, s), (y, t)$  に対して、次の式が成立する、

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t).$$

(ii')  $\dim M = 2$  のとき、

(b)  $K > 0$  が存在して、  $\Omega(\bar{X})$  に含まれる任意の相異なる 3 点  $(x, s), (y, t), (z, u)$  に対して、次の式の少なくとも 1 つが成立する；

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t),$$

$$d(y, z) > K \cdot d'(t, u),$$

$$d(z, x) > K \cdot d'(u, s).$$

(c)  $\pi_M|_{\Omega(\bar{X})}$  に関する任意の 2 重点  $(\alpha, s), (\alpha, t)$  に対して,  $(\alpha, s), (\alpha, t)$  を通る  $\bar{X}$  の軌道を  $\gamma, \gamma'$  とするとき,  $\pi_M(\gamma)$  と  $\pi_M(\gamma')$  は  $\alpha$  に於て transversal に交わる.

(注意) (a) より  $\pi_M: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$  は self-intersection を持たないことがわかり, (b) より  $\pi_M: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$  は 3 重点の self-intersection を持たないことがわかる.

Theorem  $X \in P^1(M \times R)$  が  $C^1\tilde{\Omega}W$ -stable ならば次のことが成立する.

(i)  $p_*(X) = \bar{X}$  は  $C^1\Omega$ -stable.

(ii)  $\Omega(\bar{X})$  が  $\pi_M$  に関して general position にある.

紙数の都合で, 証明は書かないが, 特に  $C^1$  級であることが必要となる部分を示すと, general position の条件 (ii) を示すのに  $C^1\Omega$ -stability であることを使った. 又, C. C. Pugh の general density theorem [5], "周期点は  $\Omega$  の中で稠密であるという性質は  $C^1$ -topology で生成的である" という結果と, J. Franks の " $C^1\Omega$ -stable ならば周期軌道は双曲型である" という結果 [2] も定理の証明の中で  $C^1$ -topology がきいた部分である. 他には, 特に Lemma 1 と Lemma 2 が本質的な部分である.

Corollary  $X \in P^1(M \times R)$  が自然数と異なる周期の周期軌道又は持異点を持てば,  $X$  は  $C^1\tilde{\Omega}W$ -stable ではない.

(proof)  $\gamma$  が  $X$  の (周期) 軌道ならば,  $p(\gamma) = \bar{\gamma}$  は  $\bar{X}$  の軌道で

ある。  $\gamma$  の周期  $\sigma$  が有理数ならば、  $\bar{\gamma}$  は閉軌道だから  $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$  である。  $\sigma$  が無理数ならば Proposition 5 により  $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$  である。 次に、  $\sigma$  が自然数でないとする。  $\sigma$  が無理数のときは、 Proposition 5 により  $\pi_M: \bar{\gamma} \rightarrow M$  の無限重点がある。  $\sigma = n/m$  (自然数の既約分数) であるとき、  $\pi_M: \bar{\gamma} \rightarrow M$  は  $m$  重点を持つ。 故に  $\dim M \geq 3$  ならば、 Theorem により  $X$  は  $C^1\tilde{\Omega}\omega$ -stable ではない。  $\sigma = n/2$  のとき、 2 重点しか存在しないが、 この  $\pi_M$  の self-intersection に於て  $\pi_M(\bar{\gamma})$  は transversal ではない。 故に  $\dim M = 2$  の場合も、 Theorem により  $X$  は  $C^1\tilde{\Omega}\omega$ -stable ではない。

Theorem の逆に関連して、 次の予想を示しておく。

予想.  $\dim M \geq 3$ ,  $X \in P^r(M \times R)$ , そして  $r \geq 2$  とし、 次の条件が満たされているものとする。

- (i)  $p_*(X) = \bar{X}$  の Poincaré map  $T_{\bar{X}}$  は Axiom A と no-cycle property を満たす。
  - (ii)  $\Omega(\bar{X})$  が  $\pi_M$  に関して general position にある。
- すると、  $X$  は  $C^r\tilde{\Omega}\omega$ -stable になる。
- 条件 (i) により、  $\bar{X}$  の perturbation  $\bar{Y}$  に対して  $T_{\bar{X}}$  と  $T_{\bar{Y}}$  は  $\Omega$ -equivalent, 従って  $\bar{X}$  と  $\bar{Y}$  は  $\Omega\omega$ -equivalent となる。 この  $\Omega$ -equivalence,  $h(\bar{Y}): \Omega(T_{\bar{X}}) \rightarrow \Omega(T_{\bar{Y}})$  の性質は例えば J. Franks [3] 等によって知られているが十分ではない。  $\bar{Y}$  が  $\bar{X}$  の  $C^2$ -

perturbation のとき,  $h(\bar{Y})$  が Lipschitz topology で十分に恒等写像に近いことが, もし言えるならば,  $\Omega(\bar{Y}) \in \pi_n$  に因して general position となる. 従って  $\pi_n: \Omega(\bar{Y}) \rightarrow \omega(\bar{Y})$  も同型写像となり, このことから,  $X$  が  $C^r \Omega$ -stable となる.

## 文 献

- [1] 池上宜弘, Periodic time dependent dynamical system について, 常微分方程式の定性的研究, 京都大学数理解析研究所講究録, 1976年5月.
- [2] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. A.M.S. 158 (1971), 301-308.
- [3] —, Differentiably  $\Omega$ -stable diffeomorphisms, Topology 11 (1972), 107-113.
- [4] N. Levinson, Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. Math. 45 (1944), 723-737.
- [5] C.C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021.